

# 2005版

## 数学复习指南

原著：陈文灯/黄先开/曹显兵

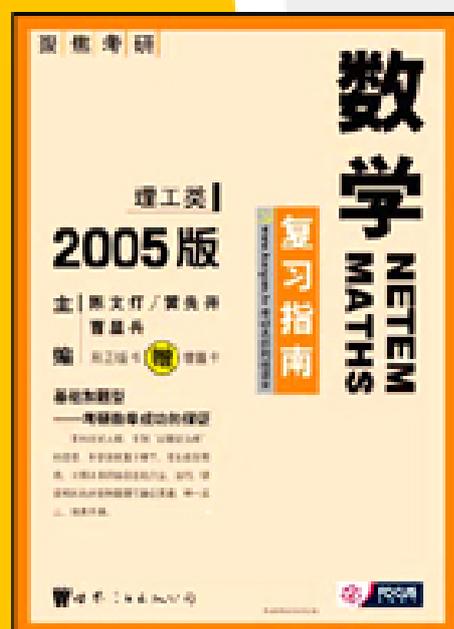
(理工类)

# 习题详解

潘正义编写

考试在线名师课堂

www.kaoshi.tv





## 潘正义教授

**所授课程：**考研数学(考试在线资深考研数学名师)

**教育背景：**天津农学院任数学教研室主任

**名师简介：**潘正义教授，1963年毕业于同济大学数学系，从事数学教学40余年，退休前是天津农学院数学教研室主任，长期在一线从事数学教学工作，参编数本数学教材，并由科学出版社出版了译著“美国大学生数学竞赛例题精讲”一书(该书是普斯林格出版社数学丛书中关于解题方法的很有名的书籍)，先后在各种数学刊物上发表了：“矩阵与指点问题的注记”等和数学解题方法有关的文章20余篇。1999年起在天津大学培训部从事考研数学培训工作，主讲陈文灯先生的考研教材，并精讲了陈先生教材中的全部习题。

## 第九章 向量代数与空间解析几何

一. 设有两个向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , 试比较  $|\vec{a} + \vec{b}|$  与  $|\vec{a} - \vec{b}|$  的大小.

解. 由向量加法的平行四边形法则知: 当  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  夹角小于  $\frac{\pi}{2}$  时,  $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$ ; 当  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  夹角大于  $\frac{\pi}{2}$  时,  $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$ ; 当  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  夹角等于  $\frac{\pi}{2}$  时,  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ .

二. 化简下列各式:

1.  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} - (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$

2.  $(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \cdot [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})]$

3.  $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a})$

解. 1.  $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} - (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} = 2\vec{a} \times \vec{b}$

2.  $(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \cdot [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})]$   
 $= (\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \cdot [-\vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{c}] = (\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) \cdot [-\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}]$   
 $= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) - 2\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}) = 3\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

3.  $[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = [\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}] \cdot (\vec{c} + \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = 2(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

三. 已知  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{3}\pi$ , 问: 系数  $\lambda$  为何值时, 向量

$\vec{A} = \lambda\vec{a} + 17\vec{b}$  与  $\vec{B} = 3\vec{a} - \vec{b}$  垂直.

解.

$$0 = \vec{A} \cdot \vec{B} = (\lambda\vec{a} + 17\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 3\lambda |\vec{a}|^2 - \lambda |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{2}{3}\pi + 5 |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{2}{3}\pi - 17 |\vec{b}|^2$$

$$= 17\lambda - 680. \text{ 所以 } \lambda = \frac{680}{17} = 40.$$

四. 求同时垂直于向量  $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  和  $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$  的单位向量.

解. 假设所求向量为  $\vec{c}$ , 则



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \text{ 的模} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

所以  $\vec{c} = \pm \frac{1}{3}(\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k})$

五. 若  $\vec{a} = 4\vec{m} - \vec{n}$ ,  $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$ , 式中  $|\vec{m}| = 2, |\vec{n}| = 1$ , 又  $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2}$ , 化简

表达式  $\vec{a} \cdot \vec{c} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 1$ .

解.  $\vec{a} \cdot \vec{c} + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 1$

$$= (4\vec{m} - \vec{n}) \cdot (2\vec{m} - 3\vec{n}) + 3(4\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\vec{m} + 2\vec{n}) - 2(\vec{m} + 2\vec{n}) \cdot (2\vec{m} - 3\vec{n}) + 1$$

$$= 16|\vec{m}|^2 + 9|\vec{n}|^2 + 1 = 16 \times 4 + 9 \times 1 + 1 = 74$$

六. 求平行四边形面积, 若已知对角线为向量  $\vec{c} = \vec{m} + 2\vec{n}$ ,  $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$ ,  $|\vec{m}| = 1, |\vec{n}| = 2, (\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$ .

解. 假设平行四边形的二边为向量  $\vec{A}, \vec{B}$

不妨假设  $\begin{cases} \vec{A} + \vec{B} = \vec{m} + 2\vec{n} \\ \vec{A} - \vec{B} = 3\vec{m} - 4\vec{n} \end{cases}$ , 所以  $\begin{cases} \vec{A} = 2\vec{m} - \vec{n} \\ \vec{B} = -3\vec{m} + 3\vec{n} \end{cases}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2\vec{m} - \vec{n}) \times (-3\vec{m} + 3\vec{n}) = 5\vec{m} \times \vec{n}$$

平行四边形面积  $= |\vec{A} \times \vec{B}| = 5|\vec{m} \times \vec{n}| = 5|\vec{m}||\vec{n}|\sin(\vec{m}, \vec{n}) = 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 5$

七. 设  $\vec{A} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{B} = k\vec{a} + \vec{b}$ , 其中  $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \perp \vec{b}$  问:

1.  $k$  为何值时,  $\vec{A} \perp \vec{B}$ ;

2.  $k$  为何值时,  $\vec{A}$  与  $\vec{B}$  为邻边的平行四边形面积为 6.

解. 1.  $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ .

所以  $0 = \vec{A} \cdot \vec{B} = (2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (k\vec{a} + \vec{b}) = 2k|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 2k + 4, \quad k = -2$ ;

2.  $\vec{A} \times \vec{B} = (2\vec{a} + \vec{b}) \times (k\vec{a} + \vec{b}) = (2-k)(\vec{a} \times \vec{b})$



平行四边形面积为  $|\vec{A} \times \vec{B}|$  的模. 所以

$$6 = |\vec{A} \times \vec{B}| = |2 - k| |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = |2 - k| \cdot 2, \quad k - 2 = \pm 3$$

所以  $k_1 = 5, \quad k_2 = -1$

八. 求通过三平面  $2x + y - z = 0, x - 3y + z + 1 = 0$  和  $x + y + z - 3 = 0$  的交点, 且平行于平面  $x + y + 2z = 0$  的平面方程.

解. 所求平面平行于  $x + y + 2z = 0$ , 所以该平面的法矢为  $(1, 1, 2)$ .

$$\text{三平面的交点为 } \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x - 3y + z + 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } x = 1, y = 1, z = 1.$$

所以所求平面为  $(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0$

即  $x + y + 2z - 4 = 0$

九. 过平面  $x + 28y - 2z + 17 = 0$  和平面  $5x + 8y - z + 1 = 0$  的交线, 作球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  的切平面, 求切平面方程.

解. 过平面  $x + 28y - 2z + 17 = 0$  和平面  $5x + 8y - z + 1 = 0$  的交线的平面方程为

$$x + 28y - 2z + 17 + \lambda(5x + 8y - z + 1) = 0$$

即  $(1 + 5\lambda)x + (28 + 8\lambda)y - (2 + \lambda)z + 17 + \lambda = 0$

假设平面和球面的切点为  $(x_0, y_0, z_0)$ , 于是在该点的法矢量为  $(x_0, y_0, z_0)$ . 所以得到:

$$\begin{cases} (1 + 5\lambda)x_0 + (28 + 8\lambda)y_0 - (2 + \lambda)z_0 + 17 + \lambda = 0 \\ \frac{1 + 5\lambda}{x_0} = \frac{28 + 8\lambda}{y_0} = \frac{-(2 + \lambda)}{z_0} = t \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \end{cases}$$

由第二式解出  $x_0, y_0, z_0$  和  $t, \lambda$  的关系, 代入第一式, 并注意到第三式, 于是得到

$$t + 17 + \lambda = 0$$

再次代入第一式, 得到

$$(1 + 5\lambda)^2 + (28 + 8\lambda)^2 + (2 + \lambda)^2 = (17 + \lambda)^2$$

$$89\lambda^2 + 428\lambda + 500 = 0$$

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -\frac{250}{89}$$

当  $\lambda = -2$ , 得到所求平面为  $3x - 4y - 5 = 0$ ;

当  $\lambda = -\frac{250}{89}$ , 得到所求平面为  $387x - 164y - 24z - 421 = 0$

十. 设  $L_1, L_2$  为两条共面直线,  $L_1$  的方程为  $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}$ ,  $L_2$  通过点  $(2, -3, -1)$ ,

且与  $x$  轴正向夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 与  $z$  轴正向夹角, 求  $L_2$  的方程.

解. 因为  $L_2$  与  $x$  轴正向夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 与  $z$  轴正向夹角, 所以可以假定  $L_2$  的方向向量为  $(m, n, 1)$ , 其中  $m > 0$ .  $x$  轴的单位向量为  $(1, 0, 0)$ . 由向量夹角公式可得

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{m}{1 \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \quad (*)$$

$L_1$  上的点  $(7, 3, 5)$ ,  $L_2$  上的点  $(2, -3, -1)$  构成向量  $(5, 6, 6)$  与  $L_1$  的方向向量  $(1, 2, 2)$ 、 $L_2$  的方向向量  $(m, n, 1)$  共面. 所以混合积为 0, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 6 \\ m & n & 1 \end{vmatrix} = 0$$

得到  $4n - 4 = 0, n = 1$ . 代入(\*)式, 得到  $m = \frac{2}{\sqrt{6}}$ . 于是  $L_2$  的方程为

$$\frac{x-2}{\frac{2}{\sqrt{6}}} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+1}{1}, \quad \text{即} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{\sqrt{6}} = \frac{z+1}{\sqrt{6}}$$

十一. 求直线  $\begin{cases} x = 3z - 1 \\ y = 2z - 3 \end{cases}$  与直线  $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = 7x + 2 \end{cases}$  之间的垂直距离.

解. 两直线可转化成  $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = z = t$  及  $x = \frac{y+5}{2} = \frac{z-2}{7} = s$

于是得到参数方程:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases}, \quad \begin{cases} x = s \\ y = -5 + 2s \\ z = 2 + 7s \end{cases}$$



两直线上的点之间的距离平方为:

$$d^2 = (-1+3t-s)^2 + (-3+2t+5-2s)^2 + (t-2-7s)^2$$

$$= (-1+3t-s)^2 + (2+2t-2s)^2 + (t-2-7s)^2$$

当  $t, s$  使  $d^2$  达到最小值时,  $d$  即为垂直距离. 所以

$$\frac{\partial d^2}{\partial t} = 6(-1+3t-s) + 4(2+2t-2s) + 2(t-2-7s) = 0$$

$$\frac{\partial d^2}{\partial s} = -2(-1+3t-s) - 4(2+2t-2s) - 14(t-2-7s) = 0$$

得方程组: 
$$\begin{cases} 28t - 28s - 2 = 0 \\ -28t + 108s + 22 = 0 \end{cases}, \quad s = -\frac{1}{4}, \quad t = -\frac{5}{28}$$

将  $t, s$  的值代入  $d^2$  的表达式, 算得  $d$  的值为:

$$d^2 = \left(-1 - \frac{15}{18} + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{10}{28} + \frac{2}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{28} - 2 + \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{5040}{28^2}$$

$$d = \frac{3\sqrt{35}}{7}$$

十二. 已知直线 
$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 4y - z + d = 0 \end{cases}$$
 与  $z$  轴相交, 求  $d$  值.

解. 假设直线与  $z$  轴交点为  $(0, 0, z_0)$ , 则该点满足  $3x - y + 2z - 6 = 0$ . 于是

$$2z_0 - 6 = 0, \quad z_0 = 3$$

将  $(0, 0, 3)$  代入  $x + 4y - z + d = 0$ , 得到  $d = 3$

十三. 在平面  $x + y + z + 1 = 0$  内, 求一直线, 使它通过直线 
$$\begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$
 与平面的交点,

且与已知直线垂直.

解. 直线与平面的交点满足 
$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}, \quad \text{解得交点为} \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

将已知直线转化为:  $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = z$ . 所以该直线的方向矢量为:  $(-2, -1, 1)$ . 所求直线垂直于平面的法向量  $(1, 1, 1)$ , 垂直于已知直线的方向向量  $(-2, -1, 1)$ . 所以所求直线的方向

矢量为:  $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ . 于是所求直线为:

$$\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$$

十四. 决定 $\lambda$ 使直线  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$  与直线  $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$  相交.

解. 由  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda} = t$  得到  $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+2t \\ z = 1+\lambda t \end{cases}$

代入另一直线方程, 得到:

$$2+t = -2+2t = 1+\lambda t, \quad t=4, \quad \lambda = \frac{5}{4}$$

十五. 求曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = z \end{cases}$  在各坐标面上的投影方程.

解. 在  $xoy$  平面上的投影:  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$

在  $xoz$  平面上的投影:  $\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases}$

在  $yoz$  平面上的投影:  $\begin{cases} y = z \\ x = 0 \end{cases}$ , 当  $x=0, y=z$  时,  $2y^2 \leq 4, |y| \leq \sqrt{2}$

十六. 求准线为  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 = 1 \\ x^2 = y^2 + z^2 \end{cases}$  母线 //  $z$  轴的柱面方程.

解. 因为母线平行于  $z$  轴, 所以只要消去  $z$ . 得到

$$5x^2 - 3y^2 = 1$$

为所求.

十七. 求直线  $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$  在平面  $x+y+z=0$  上的投影方程.

解. 由平面束方程知, 直线  $\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y-z=1 \end{cases}$  的投影柱面方程为



$$(x + y - z - 1) + \lambda(y - x - z - 1) = 0$$

即  $(1 - \lambda)x + (1 + \lambda)y - (1 + \lambda)z - (1 + \lambda) = 0$

上述平面与平面  $x + y + z = 0$  垂直, 所以

$$(1 - \lambda) \cdot 1 + (1 + \lambda) \cdot 1 - (1 + \lambda) \cdot 1 = 0$$

得到  $\lambda = 1$ . 于是投影平面为

$$2y - 2z - 2 = 0, \quad \text{即} \quad y - z - 1 = 0$$

所求投影直线为 
$$\begin{cases} y - z - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

十八. 求通过两曲面  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$  和  $x^2 = y^2 + z^2$  的交线, 而母线平行于  $z$  轴的柱面方程.

解. 因为母线平行于  $z$  轴, 只要在方程中消去  $z$ , 得到

$$5x^2 - 3y^2 = 1$$

为所求.

# 各类考研学习卡及充值卡

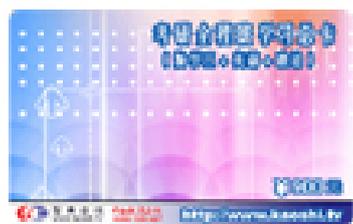
## 考研学习全程班套餐卡



考研全程班学习数学一套餐卡



考研全程班学习数学一套餐卡



考研全程班学习数学一套餐卡



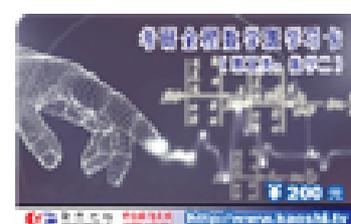
考研全程班学习数学一套餐卡

对应课程：考研数学全程班(数学一)(数学二)(数学三)(数学四)、  
考研英语全程班、考研政治全程班  
主讲教师：潘正义、张建国、夏荷荣、任丽卿、宫东风、包仁、  
徐之明、李海洋、汪云生

## 考研学习全程班单科卡



考研数学全程班数学一学习卡



考研数学全程班数学一学习卡



考研数学全程班数学一学习卡



考研数学全程班数学一学习卡

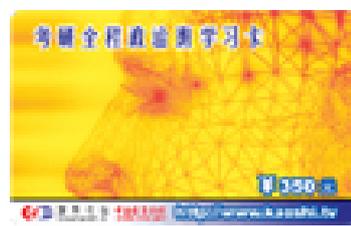
对应课程：考研数学全程班(数学一)(数学二)(数学三)(数学四)  
主讲教师：潘正义、张建国

# 各类考研学习卡及充值卡

## 考研学习全程班单科卡



名称：考研英语全程班学习卡  
对应课程：考研英语  
主讲教师：夏荷荣、任丽卿、  
宫东风



名称：考研政治全程班学习卡  
对应课程：考研政治  
主讲教师：包仁、徐之明、  
李海洋、汪云生

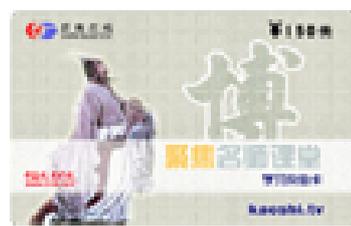
## 聚焦名师课堂学习充值卡(适用于所有课程)



聚焦名师课堂学习50元充值卡



聚焦名师课堂学习100元充值卡



聚焦名师课堂学习150元充值卡



聚焦名师课堂学习200元充值卡



## 进入名师课堂 考研路上也从容

### 考试在线名师课堂五大优势

1. 省心——听课时间可自由选择，再也不会错过好课。
2. 省力——足不出户即可听课，免去奔波之苦。
3. 省时——卡一到手，即可听课，助你考研成功。
4. 省烦恼——板书看不清、老师有口音、讲课速度快这些烦恼，全部省掉。
5. 省银子——费用比面授培训低至少1/3。

### 考试在线学习卡独具八大魅力

1. 网罗当今顶尖级考研名师，全国绝无仅有的豪华阵容。
2. 先下载，后认证，离线听课，比同类课件省99%上网费。
3. 视频不受网络带宽的影响，可以不让名师变结巴。
4. 界面集声音、图像、笔记于一体，名师与你零距离。
5. 记次不记时，可以反复跳跃听N遍。
6. 年限不定死，开卡后有效期持续一年，在任何时候都可以买到保值的学习卡。
7. 考试在线网站全方位服务支持，更可通过“考试通”与名师在线聊天，随时沟通无极限。
8. 更有超极VIP的充值卡，可以灵活自由选择课件，想听多少充多少。

网站客服电话：010-62198081 客服E-mail：member@kaoshi.tv  
客服考试通账号：8610 技术考试通账号：8616  
公司地址：北京中关村南大街12中国农科院百欣科技楼5层502  
聚焦在线 版权所有 中国教育在线 独家支持